量子力学の基本性質

シャンチー

2005.3.4

1　トビトビのスペクトル

演算子 A が縮退（同じ固有値をもつ互いに異なる固有関数が複数個あること）していないトビトビの固有値 a_i を持つことにして、エルミート性の定義より、いくつかの性質が導ける。

1.1　固有値の実数性

演算子と固有値と固有関数の関係より

$$A\phi_i = a_i\phi_i$$

により、

$$\int d^3r\phi_i^* A\phi_i = a_i \int d^3r\phi_i^*\phi_i$$

が得られる。左辺はエルミート性の定義から実数になり（物理量 A の期待値 $< A >$ は必ず実数になるため)
また右辺の積分も実数になるため、固有値 a_i は実数である。これはそんなに難しくないだろう。

1.2　固有関数の直交規格化性

まず、

$$A^*\phi_i^* = a_i\phi_i^*$$

左から ϕ_j を掛けるとすると

$$\phi_j A^* \phi_i^* = a_i \phi_j \phi_i^*$$

同様に

$$A\phi_j = a_j \phi_j$$

に関しても、左から ϕ_i^* を掛けてやりますと

$$\phi_i^* A\phi_j = a_j \phi_i^* \phi_j$$

これらの積分の差を取り、A のエルミート性という条件を用いて

$$(a_j - a_i)\int d^3r \phi_i^* \phi_j = \int d^3r\{(A\phi_i)^* \phi_j - \phi_i^* A\phi_j\}$$

今回縮退していないので、$a_i \neq a_j$ ゆえに

$$\int d^3r \phi_i^* \phi_j = 0$$

つまり、これは異なる固有値に属する 2 つの固有関数は直交することを意味している。
トビトビのスペクトルの時には、必ず（そういうときがあるかどうかは別として）定常状態のときでは有限領域内に運動が束縛されている（証明に関しては分かり次第追加します（ー。ー）?? ）今のところそうらしい。
つまり、それは $\int d^3r|\phi_i|$ が有限の値なることを意味していて、よってこの積分が規格化可能ということになり、今規格化されたとすれば、固有関数において以下の関係式が成り立つ

$$\int d^3r \phi_j^* \phi_i = \delta_{ij}$$

これは、固有関数系が直交規格化関数系を示している。